

دفترچه سؤالات مرحله اول  
 کد دفترچه: ۱

چهل و دومین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۴۰۲	۹+۱۶	۲۱۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.


۱. کد دفترچه‌ی سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مربوط روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در بالای پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.
- ۶- سؤالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه‌ای هستند پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۷- شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند. به علاوه تعدادی از دانش‌آموزان دهمی، برای شرکت آزمایشی و کسب تجربه، برای شرکت در آزمون مرحله دوم پذیرفته خواهند شد.
- ۸- وبگاه کمیته‌ی علمی المپیاد ریاضی ایران [www.mathysc.ir](http://www.mathysc.ir) است.



دانش آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ اشتباه به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد. ولی پاسخ اشتباه به سؤال‌های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج ستون است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

سؤال ۱			
میزبان	مربی	دعوتی	بیان
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹

جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کمتر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف نظر کرده و در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبه‌رو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید. در مورد سؤال‌های پنج گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

همچنین در انتهای برخی از سؤالات کوتاه پاسخ بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت  نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی است.



محاسبات و نکته‌های مهم



۱- کمیته المپیاد ریاضی هفت عضو دارد. برای تصویب یک طرح بین اعضا رأی گیری صورت می گیرد. اگر هر کدام از اعضا به احتمال یکسان به یک طرح رأی مثبت و منفی بدهند و برای تصویب طرح نیاز به حداقل دو سوم رأی مثبت باشد، احتمال تصویب یک طرح چقدر است؟

(۵)  $\frac{5}{64}$

(۴)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{17}{128}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

(۱)  $\frac{29}{128}$

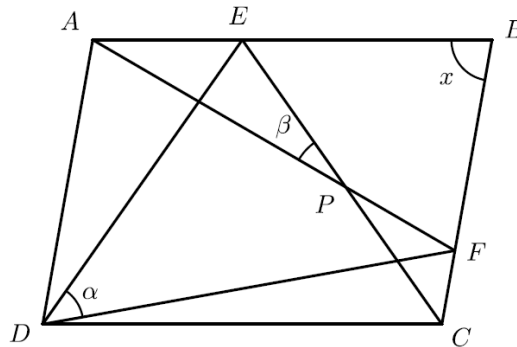
۲- معادله زیر چند جواب حقیقی دارد؟

$$(((x-1)^3 - 2)^3 - 3)^3 = 4$$

۳- چند عدد طبیعی چهار رقمی  $\overline{abba}$  یافت می شود که دقیقاً چهار مقسوم علیه طبیعی داشته باشد و مجموع ارقام آن برابر ۲۰ باشد.

: پاسخ عددی زوج است.

۴- چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است.  $\alpha$  برابر با ۵۰ درجه و  $\beta$  برابر با ۲۰ درجه هستند. اگر  $AF=FD$  و  $DE=EC$  باشند،  $x$  چند درجه است؟



۵- می خواهیم وجوه درونی و بیرونی یک هرم منتظم با قاعده مثلث را با هشت رنگ، رنگ کنیم طوری که هر رنگ دقیقاً یک بار استفاده شود. این کار به چند طریق ممکن است؟ (دو رنگ آمیزی که با یک دوران به هم تبدیل شوند را یکسان در نظر می گیریم.)

: جمع ارقام جواب ۱۲ است.



محاسبات و نکته های مهم



۶- مردم سرزمین شکرستان بسیار گیج هستند اما مهارت بالایی در نظریه اعداد دارند. هر فرد در شکرستان یک کد ملی ده رقمی دارد. این مردم هنگام پر کردن فرم‌ها در وارد کردن کد ملی خود ممکن است مرتکب دو اشتباه شوند:

دو رقم متوالی را جابجا وارد کنند مثلاً ۱۲۳۴ به جای ۱۲۴۳.

یکی از ارقام را یک واحد کم یا زیاد وارد کنند مثلاً ۱۲۲ به جای ۱۲۳.

شهروندان در هر بار پر کردن فرم حداکثر یکی از این اشتباه‌ها را انجام می‌دهند و آن هم فقط در یکی از ارقام. دولت شکرستان می‌خواهد باقی‌مانده همه کد ملی‌ها را بر یک عدد طبیعی  $N$  ثابت بگذارد طوری که شهروندان در صورت اشتباه در وارد کردن کد بلافاصله با نگاه کردن به عدد نوشته شده به اشتباه خود پی ببرند. کوچک‌ترین  $N$  ای که برای این مقصود کافی است را بیابید.

۷- فرض کنید  $-\pi < a, b, c < \pi$  اعدادی متمایز باشند طوری که  $a, b, c$  و  $\sin a, \sin b, \sin c$  تصاعدهایی حسابی باشند. مقدار  $(\sin a)^2 + (\sin b)^2 + (\sin c)^2$  در کدام بازه قرار دارد؟

(۵) هیچ‌کدام

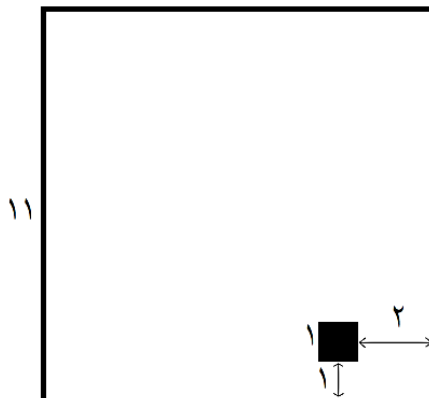
(۴)  $(0, 1)$

(۳)  $(2, 3)$

(۲)  $(1, 2)$

(۱)  $(0, 2)$

۸- شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای که می‌توان داخل مربع زیر رسم کرد طوری که محیط دایره، اشتراکی با درون مربع سیاه نداشته باشد چند است؟



محاسبات و نکته‌های مهم



۹- اگر  $x, y, z$  اعدادی حقیقی و مثبت باشند که

$$x^{\log(yz)} \times y^{\log(xz)} \times z^{\log(xy)} = 2, \quad x^{\log(x)} \times y^{\log(y)} \times z^{\log(z)} = 6$$

حاصل ضرب مقادیر ممکن برای  $xyz$  کدام است؟

- (۱) ۱۰      (۲)  $\frac{1}{10}$       (۳) ۱۰۰      (۴) ۱      (۵) هیچ کدام

۱۰- علی و رضا یک بازی انجام می دهند. علی یک عدد کمتر از ۱۰۰۰ را در ذهن خود در نظر می گیرد و رضا می خواهد این عدد را حدس بزند. به این منظور رضا می تواند تعدادی سؤال بپرسد: در هر سؤال، رضا یک عدد بین ۱۰ و ۲۰ را به علی می گوید و علی کوچک ترین مضرب مشترک عدد در ذهن خود و این عدد را به رضا می گوید. فرض کنید رضا بی نهایت باهوش است، او به چند سؤال نیاز دارد تا بتواند با اطمینان عدد علی را بفهمد؟

۱۱- امیرحسین، بابک، داریوش و پارسا روی هم ۲۰ سکه یکسان دارند. آن ها می خواهند این ۲۰ سکه را طوری بین خود تقسیم کنند که تعداد سکه های هیچ کس بیشتر از دو برابر سکه های دیگری نشود. به چند طریق می توانند این کار را انجام دهند؟

جواب عددی اول است.

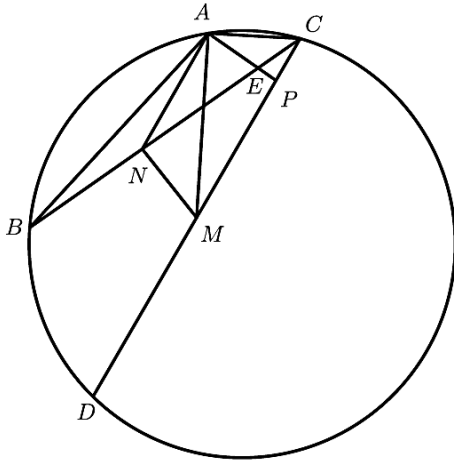
۱۲- سه کلاه با مدل های متفاوت و چهار جعبه با مدل های متفاوت در اختیار داریم. یک رنگ آمیزی از کلاه ها و جعبه ها با دو رنگ آبی و قرمز را «خوب» می نامیم، اگر هم در رنگ آمیزی کلاه ها و هم در رنگ آمیزی جعبه ها از هر دو رنگ استفاده شود. می خواهیم کلاه ها را درون جعبه ها بگذاریم. یک روش قراردعی کلاه ها در جعبه ها را نسبت به یک رنگ آمیزی «مجاز» می نامیم اگر هر کلاه قرمز درون یک جعبه قرمز و هر کلاه آبی درون یک جعبه آبی قرار گیرد. (ممکن است درون یک جعبه بیش از یک کلاه قرار گیرد یا خالی بماند). همه رنگ آمیزی های خوب ممکن را در نظر می گیریم و تعداد راه های مجاز قراردعی کلاه ها را نسبت به هر کدام از این رنگ آمیزی ها روی یک تخته می نویسیم. بزرگ ترین عدد نوشته شده روی تخته چند است؟



محاسبات و نکته های مهم



۱۳- در شکل زیر زاویه  $\angle ACB$  برابر با  $35^\circ$  درجه و زاویه  $\angle BCD$  برابر با  $25^\circ$  درجه و زاویه  $\angle EPC$  برابر با  $95^\circ$  درجه هستند. اگر  $M$  و  $N$  به ترتیب وسط پاره‌خط‌های  $DC$  و  $BE$  باشند، اختلاف زاویه‌های  $\angle MAN$  و  $\angle NAM$  چند درجه است؟



(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۰

(۵) ۲۵

۱۴- فرض کنید  $a_1, a_2, a_3, a_4$  یک تصاعد هندسی با قدر نسبت  $q$  باشد، طوری که  $a_1$  عددی طبیعی،  $q$  عددی گویا و مثبت است و داریم

$$a_1 + a_2 + a_3 = 19$$

مجموع مقادیر ممکن  $a_1 a_4$  را بیابید.

🔔 : جواب عددی زوج است.

۱۵- فرض کنید  $n$  کارت داریم که روی آن‌ها اعداد یک تا  $n$  نوشته شده است. اطلاع دقیقی از تعداد کارت‌ها نداریم اما می‌دانیم به احتمال یک سوم، ۷ کارت، به احتمال یک سوم ۸ کارت و به احتمال یک سوم ۹ کارت داریم. دو کارت به تصادف بیرون کشیده‌ایم و مشاهده کردیم مجموع این دو کارت برابر نه شده است، اکنون با چه احتمالی تعداد کارت‌ها هفت بوده است؟

(۳)  $\frac{9}{25}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

(۱)  $\frac{1}{5}$

(۵)  $\frac{5}{17}$

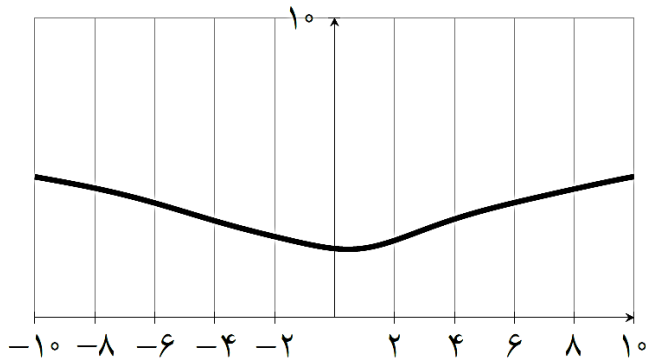
(۴)  $\frac{7}{23}$



محاسبات و نکته‌های مهم



۱۶- نمودار زیر مربوط به کدام تابع است؟



(۱)  $\log_2(x^2 - 2x - 3)$

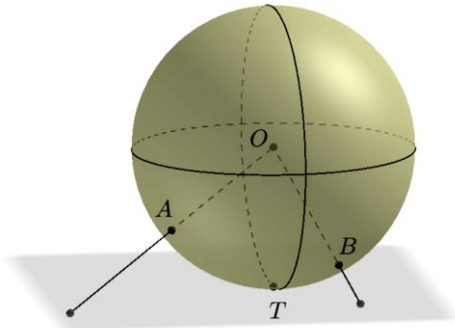
(۲)  $x^2 - 2x - 3$

(۳)  $\log_2((\cos x)^2 + (\sin x)^2 + 9)$

(۴)  $\log_2(x^2 + (\cos x)^2 + 9)$

(۵)  $\log_2(x^2 - (\sin x) + 10)$

۱۷- کره‌ای شیشه‌ای مانند شکل زیر در نقطه T با زمین مماس شده است. شعاع کره ۲۰ سانتی‌متر است و لامپ روشنی در مرکز کره (نقطه O) نصب شده و نقاط A و B روی سطح کره علامت خورده‌اند. اگر زاویه  $\angle AOB$  برابر با  $60^\circ$  درجه باشد و ارتفاع A و B از سطح زمین به ترتیب ۱۰ و ۵ سانتی‌متر باشند، فاصله سایه‌های دو نقطه A و B چند سانتی‌متر است؟



(۱)  $20\sqrt{10}$

(۲) ۶۰

(۳)  $20\sqrt{\frac{26}{3}}$

(۴)  $\frac{40\sqrt{7}}{3}$

(۵)  $20\sqrt{8}$

۱۸- دنباله  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  این گونه تعریف می‌شود که  $a_1 = 1402$  و برای  $i \geq 1$  داریم  $a_{i+1} = 2a_i + 7i$ . تقسیم باقی‌مانده  $a_{99}$  بر ۱۴ را بیابید.

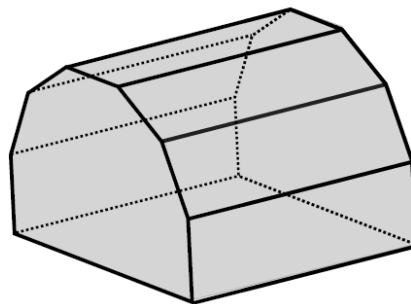
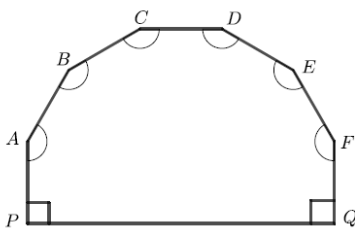


محاسبات و نکته‌های مهم



۱۹- می‌دانیم  $P(x)$  یک چندجمله‌ای درجه سه با ضرایب حقیقی است و  $P(2) = 2$  و  $P(1) = 1$  و  $P(0) = 0$ . اگر بدانیم  $P$  یک ریشه مضاعف دارد، مجموع مقادیر ممکن برای  $P(3)$  را بیابید. می‌گوییم یک چندجمله‌ای ریشه مضاعف دارد اگر عدد حقیقی  $r$  یافت شود که  $P(x) = (x-r)^2$  بخش پذیر باشد.

۲۰- سالنی با ابعاد قاعده  $50$  متر در  $50$  متر به شکل زیر ساخته شده است. (در شکل یک برش عمودی از سالن نیز نمایش داده شده است که تناظری بین پاره‌خط‌های این برش و وجوه سالن به دست می‌دهد.) در یکی از نقاط سقف چراغی نصب شده است. منظور از سقف اجتماع وجوه متناظر با پاره‌خط‌های  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$ ،  $DE$  و  $EF$  است. اگر درب ورودی در وجه متناظر با پاره خط  $PA$  قرار داشته و ارتفاعی برابر با طول  $PA$  داشته باشد و باز گذاشته شود و نور چراغ تا فاصله  $50$  متری بیرون درب ورودی، سطح زمین را روشن کرده باشد ارتفاع چراغ از سطح زمین چند متر است؟ (در شکل پاره‌خط‌های  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$ ،  $DE$ ،  $EF$  و  $FQ$  همگی طول برابری دارند و زاویه‌های مشخص شده نیز با هم برابرند.)



(۱) ۲۴

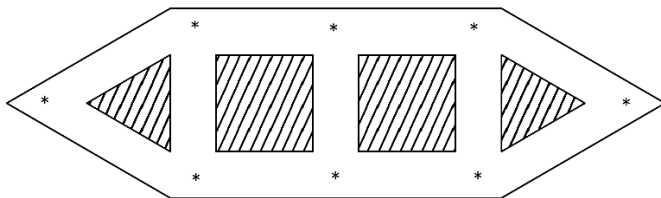
(۲)  $8\sqrt{10}$

(۳)  $6\sqrt{17}$

(۴)  $6\sqrt{\frac{49}{3}}$

(۵) ۲۵

۲۱- در موزه‌ای به شکل زیر، در نقاط علامت‌خورده آثار باستانی ارزشمندی به نمایش گذاشته شده است. می‌خواهیم در بالای نقاط علامت‌خورده تعدادی دزدگیر نصب کنیم که به محض دیدن این‌که دزدی مشغول سرقت یکی از آثار باستانی است به صدا در می‌آیند. حداقل به چند دزدگیر نیازمندیم تا با دانستن این که کدام دزدگیرها به صدا درآمده‌اند از هر سرقتی با خبر شویم و مکان دقیق سارق نیز مشخص شود (یک دزدگیر به صدا درمی‌آید اگر در مسیر مستقیمی که بین دزدگیر و دزد قرار دارد هیچ دیواری وجود نداشته باشد. در شکل نواحی هاشور خورده دیوار هستند.)



محاسبات و نکته‌های مهم







۲۲- چند زیرمجموعه سه عضوی  $\{a, b, c\}$  از اعداد طبیعی چهار رقمی وجود دارد به گونه‌ای که هر سه عدد

$$a^3 + b^3 + c^3, a^2 + b^2 + c^2, a + b + c$$

بر ۱۴۰۲ بخش پذیر باشند؟

مجموع ارقام جواب ۵ است.

۲۳- اگر  $a, b, c$  اعدادی حقیقی ناصفر باشند که

$$\begin{cases} \frac{1}{ca} = 3a + b \\ \frac{1}{ab} = b + 2c \\ \frac{1}{bc} = 2c + 3a \end{cases}$$

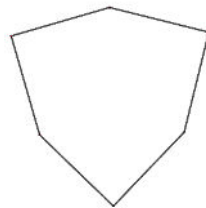
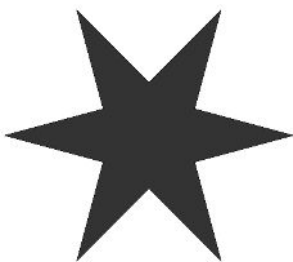
آن گاه نزدیک‌ترین عدد صحیح به  $(a + b + c)^3$  را بیابید.

۲۴- یک ۱۴۰۲ ضلعی منتظم داریم، می‌خواهیم روی هر یک از رئوس آن یکی از ارقام ۰ یا ۱ را بنویسیم طوری که روی هیچ سه رأس متوالی،

۱۰، ۰۰۰، ۱۱۱ مشاهده نشود. تعداد رقم‌های ۱ استفاده شده چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

پاسخ مضرب ۹ است.

۲۵- تمام صفحه‌ای را با کاشی‌های به شکل زیر به طور کامل کاشی‌کاری کرده‌ایم. یعنی تمام نقاط صفحه، یا روی مرز دو کاشی قرار دارند و یا



درون دقیقاً یک کاشی هستند. کاشی سیاه رنگ یک ۱۲ ضلعی با زاویه‌های داخلی

یک در میان ۲۷۰ و ۳۰ درجه است. همین طور کاشی سفید نیز یک ۶ ضلعی با

زوایای داخلی یک در میان ۱۵۰ و ۹۰ درجه می‌باشد. اگر طول تمام اضلاع هر دو

نوع کاشی ۲ سانتی‌متر باشد و یک دایره بزرگ در صفحه با شعاع بیشتر از

۱۰۰۰۰۰ رسم کنیم. نسبت مساحت سیاه رنگ به مساحت سفید رنگ داخل دایره به چه عددی نزدیک‌تر است؟

(۵)  $8\sqrt{3} - 12$

(۴)  $4\sqrt{3} - 6$

(۳)  $2\sqrt{3} - 3$

(۲)  $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

(۱)  $3\sqrt{3} - \frac{9}{2}$



محاسبات و نکته‌های مهم

