

دفترچه سؤالات مرحله دوم

چهلمین و دومین المپیاد ریاضی

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۴۰۳	۶	۲۷۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سؤال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سؤال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
- با توجه به آن که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم (به جز دانش‌آموزانی که به صورت آزمایشی در این آزمون شرکت کرده‌اند) انتخاب می‌شوند.
- بارم هر سؤال ۱۵ نمره است.



سؤال اول:

کیمیا ساعت عجیبی دارد. عقربه ثانیه‌شمار این ساعت درست کار نمی‌کند و در هر لحظه به جای یک ثانیه به طور تصادفی ۳۴ یا ۴۷ ثانیه جابجا می‌شود. مثلاً اگر در یک لحظه ساعت زمان ۰۵:۲۳:۱۲ را نشان دهد ممکن است در لحظات بعدی به ترتیب زمان‌های

$$۱۲:۲۳:۳۹, ۱۲:۲۴:۱۳, ۱۲:۲۵:۰۰, ۱۲:۲۵:۳۴, ۱۲:۲۶:۲۱, \dots$$

را نشان دهد. ثابت کنید همواره لحظه‌ای وجود دارد که عقربه ثانیه‌شمار عدد مربع کاملی را نشان می‌دهد.

سؤال دوم:

۲- همه دنباله‌های $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $n \geq 3$ داشته باشیم:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \dots + \frac{1}{a_{n-2} a_n} = 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2}$$

سؤال سوم:

در مثلث ABC مرکز دایره‌های محاطی داخلی، محاطی خارجی نظیر راس B و محاطی خارجی نظیر راس C را به ترتیب I, K و L می‌نامیم. خطوط عمود بر BC در B, C به ترتیب AB, AC را در E, F قطع می‌کنند. ثابت کنید دوایر AEF, FIL, EIK هم‌مرس هستند.



محاسبات و نکته‌های مهم



سؤال چهارم:

در مثلث ABC، M وسط AB و B' پای ارتفاع B است. دایره CB'M خط BC را برای بار دوم در D قطع می‌کند. دایره‌های ABD, CB'M برای بار دوم در K متقاطع هستند. خط موازی AB که از C می‌گذرد، دایره CB'M را برای بار دوم در L قطع می‌کند. ثابت کنید KL پاره‌خط CM را نصف می‌کند.

سؤال پنجم:

سهند و غلام روی جدولی ۱۴۰۳×۱۴۰۳ که در ابتدا همه خانه‌های آن سفید هستند بازی می‌کنند. به ازای هر سطر و هر ستون یک دکمه داریم (مجموعاً ۲۸۰۶ دکمه). با شروع از سهند هر کس در نوبت خود یک دکمه که قبلاً فشار داده نشده را فشار می‌دهد، و سپس نوبت نفر دیگر می‌شود تا زمانی که تمام دکمه‌ها فشار داده شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط سهند تمام خانه‌های آن سطر یا ستون مستقل از رنگشان قبل از فشرده شدن دکمه، کاملاً به رنگ مشکی تبدیل می‌شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط غلام تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشرده شدن دکمه، کاملاً به رنگ قرمز تبدیل می‌شوند. در انتها پس از این که همه دکمه‌ها فشرده شدند غلام به اندازه تعداد خانه‌های قرمز منهای تعداد خانه‌های سیاه و سهند به اندازه تعداد خانه‌های سیاه منهای تعداد خانه‌های قرمز امتیاز می‌گیرند اگر غلام و سهند هر دو بهترین بازی خود را انجام دهند، غلام حداقل چند امتیاز کسب خواهد کرد. (به بیان دیگر بیشترین امتیازی که غلام با بازی خوب خود مستقل از بازی سهند می‌تواند از کسب آن مطمئن باشد را بیابید.)

سؤال ششم:

فرض کنید p یک عدد اول است. همه اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک x,y را بیابید که داشته باشیم

$$\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} = (p+1)^2$$



محاسبات و نکته‌های مهم