دفترچه سؤالات مرحله دوم

سی‌و‌چهارمین المپیاد کامپیوتر

سال برگزاری	تعداد سؤالات	زمان پاسخ‌گویی
۱۴۰۳	۲۰+۴	۵۱۰ دقیقه

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین‌حساب مجاز نیست.

۱- بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سؤالات داخل دفترچه را بررسی نمایید و از وجود همه برگه‌های دفترچه سؤال مطمئن شوید. در صورت وجود هر گونه نقصی، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۲- یک برگ پاسخ برگ در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳- کلیه جواب‌ها باید در پاسخ‌برگ وارد شود. پاسخ‌های نوشته شده در دفترچه سؤال تصحیح نشده و به آن‌ها هیچ امتیازی تعلق نخواهد گرفت.

۴- پاسخ برگ شما را دستگاه تصحیح می‌کند. پس آن را تا نکنید و تمیز نگه‌دارید و پاسخ هر سؤال را با مداد مشکی نرم در محل خانه مربوطه کاملاً سیاه کنید.

۵- نام و نام‌خانوادگی خود را روی کلیه صفحات دفترچه سؤال و پاسخ برگ بنویسید.

۶- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ‌تاب ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.

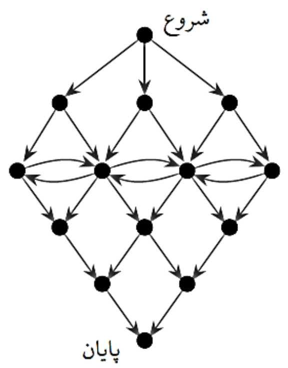
۷- پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست یک نمره منفی دارد.

۸- **ترتیب گزینه‌ها به صورت تصادفی است.** سؤالات ۱۷ تا ۲۰ در دسته‌های چند سؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.

۹- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند.

۱۰- دفترچه سؤال باید به همراه پاسخ‌نامه به مسئول مربوطه تحویل شود.

۱- مریم می‌خواهد از بالاترین رأسِ گراف جهت‌دار زیر به پایین‌ترین رأس آن برود. او تنها می‌تواند در جهتِ مشخص شده روی یال‌ها حرکت کند و نمی‌تواند از هیچ رأسی بیش از یک بار عبور نماید. مریم به چند روش می‌تواند این مسیر را بپیماید؟



۱) ۶۰

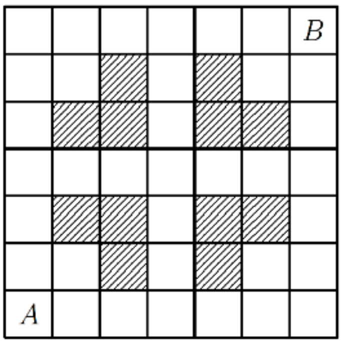
۲) ۴۸

۳) ۱۴

۴) ۷۲

۵) ۹۶

۲- بردیا می‌خواهد در جدول زیر از خانهٔ A به خانهٔ B برود. در خانه‌هایی از این جدول که با هاشور مشخص شده‌اند، مانع وجود دارد. او در هر مرحله می‌تواند به یکی از خانه‌های مجاورِ ضلعیِ خانهٔ فعلی‌اش برود، ولی نمی‌تواند وارد خانه‌ای شود که قبلاً در آن حضور داشته یا در آن مانع هست. بردیا به چند روش می‌تواند این مسیر را طی کند؟



۱) ۱۰۴

۲) ۴۸

۳) ۶۴

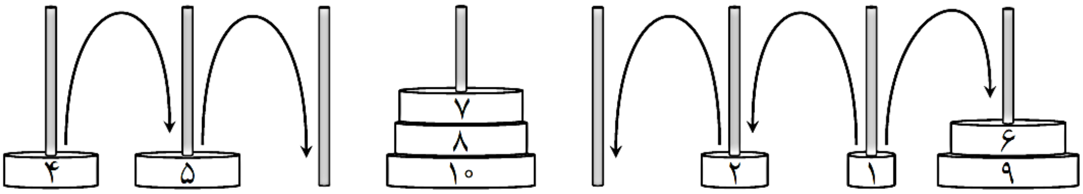
۴) ۹۶

۵) ۸۰

۳- ۱۰ میله مانند شکل صفحهٔ بعد، در یک ردیف روی زمین نصب شده‌اند. ملیکا ۱۰ دیسک با وزن‌های ۱ تا ۱۰ کیلوگرم (از هر وزن، دقیقاً یک دیسک) دارد و در ابتدا، دقیقاً یک دیسک را در هر میله گذاشته است. او در هر مرحله می‌تواند یک میله را که دقیقاً یک دیسک دارد، انتخاب و دیسک آن را خارج کند و از بالا داخل یکی از میله‌های مجاورش بیندازد، به شرطی که دیسکِ جابه‌جا شده از بالاترین دیسکِ میلهٔ مقصد سبک‌تر باشد یا این‌که میلهٔ مقصد هیچ دیسکی نداشته باشد.

محاسبات و نکته‌های مهم

برای مثال، وضعیت دیسک‌ها می‌تواند پس از تعدادی مرحله، مانند شکل زیر باشد و در مرحلهٔ بعد، ملیکا می‌تواند در جهت یکی از پیکان‌های کشیده شده دیسکی را جابه‌جا کند. از میان همهٔ حالات ممکن برای چینش اولیهٔ دیسک‌ها در میله‌ها، ملیکا برای چند حالت می‌تواند همهٔ دیسک‌ها را با تعدادی حرکت، به یک میله منتقل کند؟ فرض کنید هر یک از میله‌ها به‌قدری بلند است که بتوان همهٔ ۱۰ دیسک را با هم در آن میله جای داد و فاصله بین میله‌ها نیز به حدی هست که دیسک‌های دو میلهٔ مجاور به هم گیر نکنند.



۱) ۵۱۲ ۲) ۳۶۲۸۸۰ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۳۶۲۸۸۰۰ ۵) ۲۰۴۸

۴- آرمیتا و باران مشغول یک بازی روی تخته‌سیاه هستند. در ابتدا، باران یک عدد طبیعیِ دل‌خواه را انتخاب می‌کند و آن را روی تخته‌سیاه می‌نویسد. سپس آرمیتا بازی را شروع می‌کند و بعد از هر یک، نوبت به شخصِ دیگر می‌رسد. آرمیتا در هر نوبتش می‌تواند به مقدارِ a یا $2a$ از عددِ روی تخته کم کند و عدد حاصل را به‌جای آن بر روی تخته بنویسد. باران هم در هر حرکت می‌تواند به مقدارِ b یا $2b$ از عدد روی تخته کم کند و عدد حاصل را جایگزینِ عدد روی تخته کند. نهایتاً، کسی که عددی کمتر از صفر روی تخته بنویسد، بَرندهٔ بازی است. اگر هر دو نفر بهینه عمل کنند، به ازای چند مورد از حالت‌های زیر برای مقدارِ a و b، آرمیتا می‌تواند همواره طوری بازی کند که برندهٔ بازی باشد؟ لازم به ذکر است که بهینه عمل کردنِ باران، شامل انتخابِ او در تعیینِ عدد اولیت نوشته شده روی تخته‌سیاه نیز می‌شود.

$(a=40\,,\ b=40)$ ، $(a=30\,,\ b=15)$ ، $(a=20\,,\ b=35)$ ، $(a=10\,,\ b=4)$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۰ ۵) ۱

۵- دو مجموعهٔ مجزای $S=\{A,B,C,D\}$ و $T=\{1,2,3,4\}$ را در نظر بگیرید. به یک زیرمجموعه از $S\cup T$ **زیبا** می‌گوییم اگر ۴ عضوی باشد و با هر کدام از دو مجموعهٔ S و T، دقیقاً دو عضو مشترک داشته باشد. مثلاً مجموعهٔ $\{A,D,2,3\}$ زیبا است، اما مجموعهٔ $\{A,B,D,4\}$ زیبا نیست. می‌خواهیم به هر مجموعهٔ زیبا، یک رنگ منتسب کنیم با این شرط که به هر دو مجموعهٔ متمایزِ زیبا که حداقل دو عضو مشترک دارند، رنگ‌های متفاوتی منتسب شده باشد. به حداقل چند رنگ مختلف برای انجام این کار نیاز داریم؟

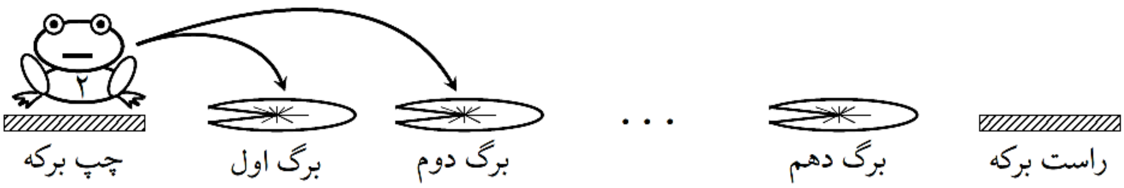
۱) ۱۵ ۲) ۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶ ۵) ۹

محاسبات و نکته‌های مهم

۶- پارمیس و نازلی هر کدام در خانه‌ای از یک جدول ۹ × ۹ قرار دارند. پارمیس در پایین‌ترین و چپ‌ترین خانه، و نازلی در بالاترین و راست‌ترین خانه از جدول قرار دارد. هر روز صبح، پارمیس یک سکه می‌اندازد که با احتمالِ برابر، شیر یا خط می‌آید. اگر سکه شیر آمد، پارمیس از جایی که قرار دارد، یک خانه به سمت بالا می‌رود و نازلی نیز از جایی که قرار دارد، یک خانه به سمت پایین حرکت می‌کند. اگر سکه خط آمد، پارمیس یک خانه به سمت راست، و نازلی یک خانه به سمت چپ می‌رود. سپس، هر دوی آن‌ها در خانه‌ای از جدول که در آن قرار دارند، شب را صبح می‌کنند. این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که پارمیس یا نازلی از جدول خارج شوند. احتمال این‌که نازلی و پارمیس شبی را با هم، در خانهٔ یکسانی از جدول سپری کنند، چقدر است؟

۱) $\frac{۳۵}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۶۳}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۴۹۰}{۱۲۸۷}$ ۴) ۰ ۵) $\frac{۶۴۳۵}{۳۲۷۶۸}$

۷- روی یک برکه مانند شکل زیر، ۱۰ برگ در یک ردیف، از چپ به راست، در جایگاه‌های ۱ تا ۱۰ قرار دارند. در سمت چپِ این برکه، ۱۰ قورباغه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ حضور دارند و می‌خواهند با عبور از روی برگ‌ها، به سمت راستِ برکه بروند که می‌توان آن را جایگاه یازدهم در نظر گرفت. در هر لحظه، حداکثر یک قورباغه می‌تواند روی هر برگ بنشیند، و بعد از جهیدنِ یک قورباغه از روی برگی که بر آن نشسته، آن برگ به زیر آب می‌رود و دیگر قابل استفاده نیست. هر قورباغه قدرت جهش مخصوص به خود را دارد؛ قورباغهٔ شمارهٔ i (برای $۱ \le i \le ۱۰$) می‌تواند در هر حرکت، حداکثر i جایگاه به سمت راست بجهد. مثلاً قورباغهٔ شمارهٔ ۲، مطابق شکل زیر، می‌تواند در یک حرکت از ابتدای برکه به روی یکی از برگ‌های اول یا دوم بجهد. با توجه به شرایط گفته شده، حداکثر چند قورباغه می‌توانند با جهیدن روی برگ‌ها، از برکه رد شوند؟



۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۸ ۵) ۷

۸- سهیل دنبالهٔ ۴۲ عضویِ سیبوناچی را به صورت زیر تعریف کرده است:

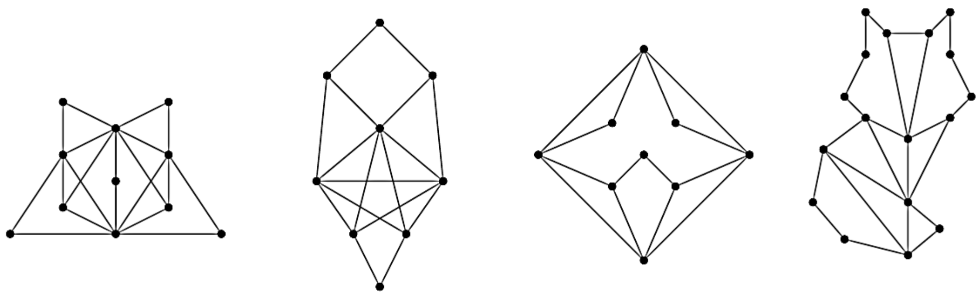
- ۵ عضو اول دنباله عبارتند از: $s_۱ = ۳۷ , s_۲ = ۴۲ , s_۳ = ۸۴ , s_۴ = ۲۴ , s_۵ = ۴۱$
- به ازای $۵ < n \le ۴۲$ داریم: $s_n = s_{n-۱} + s_{n-۲} + s_{n-۳} + s_{n-۴} + s_{n-۵}$

محاسبات و نکته‌های مهم

او یک بازه (تعدادی عضو متوالی) از دنباله را **عجیب** می‌داند، اگر حاصل‌جمع اعضای آن بازه عددی فرد باشد. مثلاً بازهٔ $\langle s_3, s_4, s_5 \rangle$ عجیب است چون اعضایش عددی فرد می‌شود، ولی $\langle s_2, s_3 \rangle$ عجیب نیست چون حاصل‌جمع اعضایش فرد نمی‌باشد. دنبالهٔ ۴۲ عضوی سیبوناچی، چند بازهٔ عجیب دارد؟

۱) ۴۴۸ ۲) ۳۹۲ ۳) ۴۶۲ ۴) ۴۲۰ ۵) ۴۰۰

۹- زهرا برای رسم یک گراف، در ابتدا تنها یک رأس می‌گذارد و بعد از آن در هر مرحله، یک رأس جدید به گرافِ فعلی اضافه می‌کند و از رأسِ اضافه شده، حداکثر دو یال به رأس‌های دیگر می‌کشد. زهرا از میان چهار گرافِ همبند زیر، چند مورد را می‌تواند به روش خود رسم کند؟



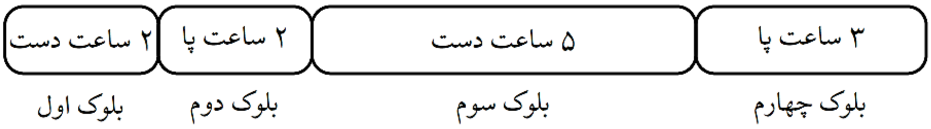
۱) ۴ ۲) ۰ ۳) ۳ ۴) ۱ ۵) ۲

۱۰- استاد شیفو می‌خواهد یک برنامهٔ تمرینیِ ۱۲ ساعته برای تقویت عضلات دست و پا طراحی کند. این برنامه به‌صورت دنباله‌ای از بلوک‌های تمرینی است. هر بلوک تمرینی، یا مربوط به ورزش دست است یا ورزش پا، و مدت زمان آن نیز بر حسب ساعت، عددی طبیعی است. مثلاً یک بلوک تمرینی می‌تواند از ۳ ساعت تمرین پا تشکیل شده باشد. استاد شیفو به این نتیجه رسیده است که یک برنامهٔ تمرینی مناسب، دارای شرایط زیر است:

- بلوک‌های تمرینی باید به شکل یکی در میان، مربوط به ورزش دست و ورزش پا باشند.
- اولین بلوک تمرینی باید مربوط به ورزش دست باشد.
- آخرین بلوک تمرینی باید مربوط به ورزش پا باشد.
- یک بلوک تمرینیِ ورزشِ پا، نباید از بلوک تمرینیِ قبل از آن، مدت زمان بیشتری داشته باشد.

محاسبات و نکته‌های مهم

شکل زیر نمونه‌ای از یک برنامهٔ تمرینی با شرایط مذکور را نشان می‌دهد. چند برنامهٔ تمرینیِ ۱۲ ساعته وجود دارد که از نظر استاد شیفو مناسب باشد؟ دو برنامهٔ تمرینی، متمایز محسوب می‌شوند اگر زمانی (در طولِ ۱۲ ساعت) وجود داشته باشد که در یک برنامه، برای آن زمان، ورزشِ دست تعیین شده باشد، و در برنامهٔ دیگر، برای آن زمان، ورزشِ پا تعیین شده باشد.



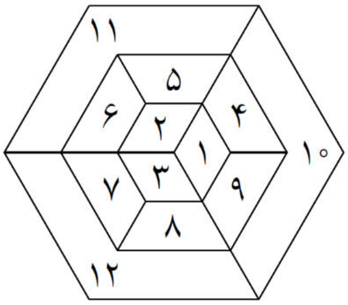
۱) ۲۸۴ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۸۶ ۴) ۱۲۳ ۵) ۱۵۵

۱۱- یک عدد صحیح نامنفی را **زیبا** می‌نامیم اگر هم مضربِ ۳ باشد و هم در نمایش دودوییِ آن، دو رقمِ یکِ متوالی وجود نداشته باشد. مثلاً عددِ ۹ زیبا است چون هم مضربی از ۳ است و هم در نمایش دودویی آن (۱۰۰۱)، هیچ دو رقمِ یکی مجاور نیستند. چند عدد زیبا در بازهٔ [۰,۱۰۲۳] (شامل خودِ ۰ و ۱۰۲۳) وجود دارد؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۸ ۳) ۳۰

۴) ۳۸ ۵) ۵۴

۱۲- سارا می‌خواهد هر یک از ۱۲ ناحیهٔ شکل زیر را با یکی از سه رنگِ آبی، قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کند، با این شرط که هر دو ناحیه‌ای که با هم ضلع مشترک دارند، رنگ‌های متفاوتی داشته باشند. او به چند روش می‌تواند این رنگ‌آمیزی را انجام دهد؟ دو روش رنگ‌آمیزی متفاوت محسوب می‌شوند اگر ناحیه‌ای وجود داشته باشد که در این دو روش، رنگ متفاوتی داشته باشد.



۱) ۲۴

۲) ۳۰

۳) ۸

۴) ۳۶

۵) ۵

محاسبات و نکته‌های مهم

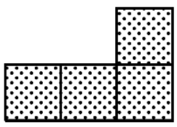
۱۳- سروش و بهرام روی یک جدول ۴ × ۴ بازی می‌کنند. در ابتدا، بهرام ۴ خانهٔ متمایز را از جدول انتخاب می‌کند و هر یک از اعدادِ ۱ تا ۴ را در یکی از آن خانه‌ها پنهان می‌کند. سروش که از انتخابِ بهرام خبر ندارد، می‌خواهد با تعدادی پرسش، مکان هر ۴ خانهٔ انتخابیِ بهرام را به همراه عددشان پیدا کند. سروش در هر پرسش می‌تواند یک زیرجدول را مشخص کند تا بهرام در پاسخ بگوید چه اعدادی در این زیرجدول وجود دارند (بدون اشاره به جایی که هر عدد پنهان شده است). یک زیر جدول، جدول ناتهی است که از اشتراکِ تعدادی سطرِ متوالی و تعدادی ستونِ متوالی از جدولِ اصلی حاصل می‌شود. سروش حداقل به چند پرسش نیاز دارد تا تحت هر شرایطی بتواند به هدفش برسد؟

۱) ۵　　۲) ۷　　۳) ۶　　۴) ۴　　۵) ۳

۱۴- برای دنبالهٔ دودوییِ $A=\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$، عدد طبیعیِ $i\in\{1,2,\dots,n-1\}$، **مشکل‌ساز** نامیده می‌شود اگر دنبالهٔ متشکل از i عنصرِ اول A با دنبالهٔ مشتکل از i عنصرِ آخرِ A برابر باشد. به بیان دقیق‌تر، عددِ i زمانی برای دنباله مشکل‌ساز است که $\langle a_1,\dots,a_i\rangle=\langle a_{n-i+1},\dots,a_n\rangle$. یک دنبالهٔ دودویی را **بی‌اشکال** می‌نامیم اگر هیچ عددی برای آن مشکل‌ساز نباشد. چند دنبالهٔ دودوییِ بی‌اشکالِ متمایز به ازای $n=12$ وجود دارد؟

۱) ۵۶۸　　۲) ۲۰۴۸　　۳) ۶۴　　۴) ۱۱۱۶　　۵) ۲۹۸۰

۱۵- امیرمحمد یک جدول ۵ × ۵ دارد. او می‌خواهد یکی از ۲۵ خانهٔ این جدول را حذف کند، و باقی خانه‌های جدول را با ۶ قطعه به شکل زیر بپوشاند، با این شرط که هر یک از ۲۴ خانهٔ باقی‌مانده از جدول، توسط دقیقاً یک قطعه پوشانده شده باشد. او می‌تواند قبل از قرار دادنِ یک قطعه در جدول، آن را به میزان دل‌خواه، دَوران یا تقارن دهد. چند خانه از این جدول هستند که امیرمحمد می‌توانند با حذف آن خانه، باقی خانه‌های جدول را با شرایطِ گفته شده بپوشاند؟



۱) ۱　　۲) ۵　　۳) ۸　　۴) ۹　　۵) ۴

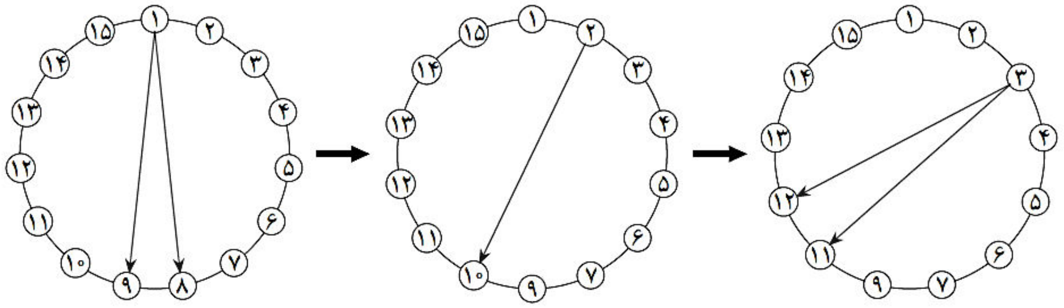
۱۶- ۱۵ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۵، مانند دایرهٔ سمت چند شکل زیر، با فاصله‌های یک‌نواخت، به ترتیبِ ساعت‌گرد دورِ یک دایره ایستاده‌اند تا مراسم ویژه‌ای را اجرا کنند. این مراسم از تعدادی مرحله تشکیل شده است و در هر مرحلهٔ آن، کسی که نوبتش است (با شروع از فردِ شمارهٔ ۱ در نخستین مرحله)، به‌صورت زیر عمل می‌کند:

- اگر تعداد افراد دور دایره زوج باشد، فردی را که در آن مرحله، در جایگاه روبه‌روی قطریِ او در دایره ایستاده است، نشانه گرفته و به او شلیک می‌کند.

- اگر تعداد افراد دور دایره فرد باشد، از دو نفری که در آن مرحله، در جایگاه‌های روبه‌روی قطری‌اش در دایره قرار دارند، یک نفر را به تصادف (با احتمال یکسان) نشانه گرفته و به او شلیک می‌کند.

پس از این حرکت، کسی که به او شلیک شده، از دور خارج می‌شود و در ادامه، افراد باقی‌مانده جایگاه‌های خود را مجدداً طوری در دایره تنظیم می‌کنند که با فاصله‌های یک‌نواخت دور آن قرار گرفته باشند. سپس برای مرحلهٔ بعدی، نوبت به کسی می رسد که در آن لحظه، بعداز فردِ شلیک‌کننده در دایره (در جهت ساعت‌گرد) قرار دارد. این مراسم تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که تنها یک نفر دور دایره باقی مانده باشد. چه افرادی این شانس را دارند که آخرین فردِ باقی‌مانده در پایان مراسم باشند؟

در شکل زیر، مثالی از مراحل ابتداییِ اجرای این مراسم نشان داده شده است. در مرحلهٔ اولِ این مثال، فرد شمارهٔ ۱ از میان افراد با شماره‌های ۸ و ۹ که در جایگاه‌های روبه‌روی قطری او هستند، به تصادف، فرد شمارهٔ ۸ را انتخاب، و به او شلیک می‌کند تا از دور خارج شود. در مرحلهٔ بعد، نوبت به شلیک فرد شمارهٔ ۲ می‌رسد، که با توجه به زوج بودنِ تعداد افراد حاضر، به فرد شمارهٔ ۱۰ شلیک می‌کند. سپس، نوبت به فرد شمارهٔ ۳ می‌رسد که باید به یکی از افراد با شماره‌های ۱۱ یا ۱۲ شلیک کند.



۱) {۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲}
۲) {۳,۵,۶}
۳) {۲,۳,۵,۶}
۴) {۲,۳,۴,۵,۶}
۵) {۸,۹,۱۱,۱۲}

یک جدولِ ۶ × ۶ را در نظر بگیرید که در هر خانهٔ آن، یک دانش‌آموزِ کلاس اول، دوم یا سوم ایستاده است. به مجموعهٔ دانش‌آموزانِ هم‌سطر یا هم‌ستونِ یک دانش‌آموز (به غیر از خودش)، **سیطرهٔ دیدِ** آن دانش‌آموز گفته می‌شود. پس سیطرهٔ دید هر دانش‌آموز، مجموعه‌ای ۱۰ عضوی است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال صفحه بعد پاسخ دهید

محاسبات و نکته‌های مهم

۱۷- اگر در سیطرهٔ دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس اولی، حداقل یک دانش‌آموزِ کلاس دومی، و در سیطرهٔ دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس دومی، حداقل یک دانش‌آموزِ کلاس سومی باشد، حداکثر چند دانش‌آموزِ کلاس اولی می‌تواند در جدول وجود داشته باشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۵ ۳) ۳۰ ۴) ۱۸ ۵) ۲۹

۱۸- اگر در سیطرهٔ دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس اولی، تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس دومی حداقل به اندازهٔ تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس اولی (در سیطرهٔ دیدِ او) باشد، و در سیطرهٔ دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس دومی، تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس سومی حداقل به اندازهٔ تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس دومی باشد، حداکثر چند دانش‌آموزِ کلاس اولی می‌تواند در جدول وجود داشته باشد؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۲۱ ۵) ۱۸

ماral جایگشتِ n تاییِ تماماً صعودیِ $\langle ۱,۲,۳,\dots,n-۱,n\rangle$ را دارد و می‌خواهد آن را با تعدادی حرکت، به جایگشتِ تماما نزولیِ $\langle n,n-۱,\dots,۳,۲,۱\rangle$ تبدیل کند. او در هر حرکت، می‌تواند مانند شکل زیر، سه جایگاهِ (i,j,k) با شرطِ $۱\le i<j<k\le n$ را در جایگشت خود انتخاب کند و اعدادِ این سه جایگاه را در آن، **دَوَران** دهد؛ یعنی عدد جایگاهِ j اُم را به جایگاهِ i اُم ببرد، عدد جایگاهِ k اُم را به جایگاهِ j اُم ببرد، و عدد جایگاهِ i اُم را به جایگاهِ k اُم ببرد. مثلاً با فرضِ داشتنِ جایگشتِ $\langle ۳,۶,۵,۴,۱,۲\rangle$، اگر او سه جایگاهِ $(۲,۳,۶)$ را برای حرکتِ دوَران انتخاب کند، بعد از انجام این حرکت، به جایگشتِ $\langle ۳,۵,۲,۴,۱,۶\rangle$ می‌رسد.

$$\langle p_۱,\ p_۲,\ p_۳,\ \dots\ p_i\ \dots\ p_j\ \dots\ p_k\ \dots\ p_n\rangle$$

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹- به ازای چند عدد صحیحِ n در محدودهٔ ۲۰۰۰ تا ۲۰۲۵ (شامل هر دوی این اعداد)، ماral می‌تواند با انجام تعدادی حرکت دوَران، جایگشتِ n تاییِ تماماً صعودیِ خود را به جایگشتی تماماً نزولی تبدیل کند؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۰ ۴) ۲۶ ۵) ۱۴

۲۰- به ازای $n=۳۳۳۳$، ماral حداقل چند حرکت دوَران نیاز دارد تا بتواند جایگشتِ n تاییِ تماماً صعودیِ خود را به جایگشتی تماماً نزولی تبدیل کند؟

۱) ۲۴۹۹ ۲) ۱۱۱۳ ۳) ۱۶۶۶ ۴) ۲۲۲۲ ۵) ۱۱۱۱

محاسبات و نکته‌های مهم

سؤال اول: (۴۰ نمره)

فرهاد جدولی ۱۴۰۱ × ۳۰۰ دارد که در ابتدا، تمام خانه‌های آن سفید هستند. او قصد دارد تعدادی از خانه‌های جدول را سیاه کند طوری که هر خانهٔ سفید در جدولِ نهایی، **مجاور رأسیِ** حداقل یک خانهٔ سیاه باشد. دو خانهٔ متمایز، مجاور رأسی هستند اگر مرزهایشان حداقل در یک نقطه با هم اشتراک داشته باشند. مثلاً در جدول زیر، خانه‌های B و C مجاور رأسیِ خانهٔ A هستند ولی خانهٔ D مجاور رأسیِ خانهٔ A نیست.

D		A	C
	B		

فرهاد برای رسیدن به هدف خود می‌تواند در هر روز، یک زیرجدولِ دل‌خواه را انتخاب نماید و با استخدامِ یک نقاشِ روزمزد، تمامیِ خانه‌های آن زیرجدول را سیاه کند. منظور از یک **زیرجدول**، مجموعهٔ خانه‌هایی است که از تلاقیِ تعدادی سطرِ متوالی و تعدادی ستونِ متوالی در جدول اصلی حاصل می‌شود. به عنوان مثال، جدولِ بالا دارای ۴ زیرجدول با ابعادِ ۳ × ۲ (حاصل تلاقیِ ۲ سطرِ متوالی و ۳ ستونِ متوالی) است. اگر ابعادِ زیرجدولِ انتخابیِ فرهاد در یک روز، $h \times w$ باشد، او باید $h \times w$ سکه (به تعداد خانه‌های زیرجدول) برای خریدِ رنگ بپردازد و علاوه بر آن، لازم است ۲ سکه نیز به عنوان هزینهٔ استخدامِ نقاش در آن روز پرداخت نماید. مثلاً اگر در یک روز، او یک زیرجدولِ ۲ × ۲ را انتخاب کند، در مجموع باید به اندازهٔ ۶=۲×۲+۲ سکه در آن روز هزینه کند. لازم به ذکر است که حتی اگر برخی از خانه‌های زیرجدولِ انتخابیِ فرهاد در یک روز، از قبل سیاه باشند، تغییری در هزینهٔ آن روزِ فرهاد ایجاد نمی‌شود.

الف) ثابت کنید فرهاد می‌تواند با پرداختِ ۱۴۰۱۰۰ سکه، به هدف خود برسد. (۲۰ امتیاز)

ب) ثابت کنید فرهاد نمی‌تواند با هزینه‌ای کمتر از ۱۴۰۱۰۰ سکه، به هدف خود برسد. (۲۰ امتیاز)

محاسبات و نکته‌های مهم

سؤال دوم: (۳۲ نمره)

n میز در یک ردیف، به ترتیب با شماره‌های ۱ تا n قرار گرفته‌اند. روی هر یک از میزهای اول و آخر (میز شمارهٔ ۱ و میز شمارهٔ n)، یک آهن‌ربای الکتریکی نصب شده است. یک توپ فلزی نیز روی یکی از n میز قرار دارد. ایراندخت قصد دارد با این وسایل بازی کند. او در هر گام از بازی، دقیقاً یکی از دو آهن‌ربا را روشن می‌کند و دیگری را خاموش می‌کند. فرض کنید در یک گام، آهن‌ربای میزِ A روشن و آهن‌ربای دیگر خاموش باشد. در این شرایط، اگر توپ فلزی، روی همان میزِ A باشد، هیچ اتفاقی رخ نمی‌دهد؛ در غیر این صورت اگر توپ فلزی روی میزی با فاصلهٔ x از میزِ A باشد، با روشن شدنِ آهن‌ربای میزِ A در یک گام، توپ به میزِ با فاصلهٔ $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ از میزِ A می‌رود که در این توصیف، فاصل بینِ میزهای i و j برابر با $|i-j|$ است. به عنوان مثال، اگر توپ فلزی روی میزهای شمارهٔ ۷ یا شمارهٔ ۸ باشد، با روشن شدنِ آهن‌ربای میز شمارهٔ ۱ در یک گام، توپ به سمت آن حرکت می‌کند و در میزِ شمارهٔ ۴ قرار می‌گیرد.

ثابت کنید ایراندخت می‌تواند توپ فلزی را از هر میزی، با تعدادی از گام‌های مذکور، به هر میزِ دیگری منتقل کند.

محاسبات و نکته‌های مهم

سؤال سوم: (۴۸ نمره)

درختِ ۱۴۰۳ رأسی T را در نظر بگیرید که درجهٔ هر رأس در آن، حداکثر ۳ است. البرز و بیتا می‌خواهند روی این درخت، یک بازی انجام دهند، به این صورت که البرز یکی از رأس‌های درختِ T به نامِ u را مخفیانه انتخاب می‌کند و بیتا باید این رأس را پیدا کند. در این بازی، بیتا می‌تواند تنها یک پرسش از البرز انجام دهد، به این شکل که دنباله‌ای از رأس‌ها مانندِ $\langle v_1 , v_2 , \dots , v_k \rangle$ را انتخاب کند و به‌صورت یک‌جا به البرز بدهد. البرز نیز در پاسخ به او، اطلاعاتی را در قالبِ k جمله به شکل زیر ارائه می‌دهد:

فاصله بین u و v_1 برابرِ d_1 است.
فاصله بین u و v_2 برابرِ d_2 است.
⋮
فاصله بین u و v_k برابرِ d_k است.

لازم به یادآوری است که **فاصله** بین دو رأس در یک گراف، تعداد یال‌های کوتاه‌ترین مسیر میانِ آن دو رأس است. همچنین، توجه نمایید که تنها چیزی که بیتا نمی‌داند، رأسِ u است، و او نیز مانند البرز، از ساختار درختِ T اطلاع کامل دارد. بر همین اساس، بیتا برای طراحیِ پرسشِ خود از البرز، الگوریتم زیر را ابداع کرده است:

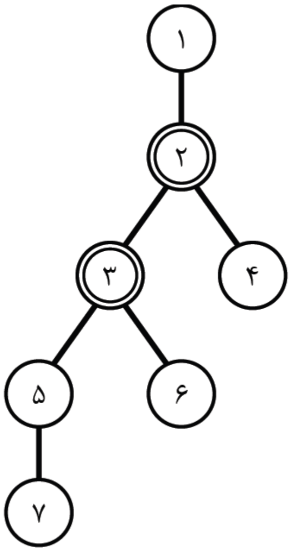
۱- درخت T را از یکی از برگ‌هایش (یکی از رأس‌های با درجهٔ یک) که آن را **ریشه** می‌نامیم، آویزان می‌کنیم.
* با آویزان شدنِ درخت از ریشه، تعاریف زیر را داریم:
- ریشه در بالاترین سطح قرار داده می‌شود و رأس‌های دیگر، متناسب با فاصله از ریشه، در سطح‌های پایین‌تر قرار می‌گیرند.
- رأسِ y را **جدِّ** رأسِ x می‌نامیم اگر مسیرِ ریشه به x، رأسِ y را نیز شامل شود.
- رأسِ y را **فرزندِ** رأسِ x می‌نامیم اگر y با x مجاور باشد ولی جدّ x نباشد (با توجه به کران بالای ۳ برای درجهٔ رأس های T، هر رأس حداکثر دو فرزند دارد).
- به رأسی که دقیقاً دو فرزند دارد، **دوشاخه** می‌گوییم.
- یک رأسِ دوشاخه را **ساده** می‌نامیم اگر جدِّ هیچ رأسِ دوشاخهٔ دیگری نباشد.

۲- رأس ریشه را رنگ می‌کنیم.
۳- تمامی رأس‌های دوشاخهٔ ساده در درختِ آویزان شده را پیدا می‌کنیم.
۴- به ازای هر رأسِ دوشاخهٔ ساده، دقیقاً یکی از دو فرزندش را به دل‌خواه، انتخاب و آن را رنگ می‌کنیم.
۵- رأس‌های رنگ شده را به عنوان پرسشِ $\langle v_1 , v_2 , \dots , v_k \rangle$ به البرز می‌دهیم.

به عنوان مثال، شکل صفحه بعد درختی رأسی را نشان می‌دهد که از رأسِ ۱ آویزان شده است. با این شرایط، رأس‌های ۲ و ۳ (که با دو دایره مشخص

محاسبات و نکته‌های مهم

شده‌اند)، رأس‌هایی دوشاخه هستند. رأسِ ۳ یک رأسِ دوشاخهٔ ساده است، چرا که به‌جز خودش، هیچ‌یک از رأس‌هایی که جدَشان است (رأس‌های ۵، ۶ و ۷)، دوشاخه نیستند؛ ولی رأسِ ۲ یک رأسِ دوشاخهٔ ساده نیست، چون جدِّ رأسِ دوشاخهٔ ۳ است. بنابراین، خروجیِ الگوریتمِ بیتا در این مثال، یکی از دنباله‌های $\langle 1,5 \rangle$ یا $\langle 1,6 \rangle$ خواهد بود و در نتیجه، دنبالهٔ خروجیِ الگوریتمِ بیتا در این مثال دقیقاً ۲ رأس خواهد داشت.



الف) ثابت کنید دنبالهٔ خروجیِ الگوریتمِ بیتا، حداکثر ۳۵۱ رأس دارد. (۱۶ امتیاز)

ب) ثابت کنید که به ازای هر درختِ T (درختی ۱۴۰۳ رأسی که درجهٔ رأس‌های آن، حداکثر ۳ باشد)، اگر بیتا الگوریتمِ خود را روی درختِ T اجرا کند و خروجیِ آن را به عنوان پرسش، به البرز دهد، همواره می‌تواند رأسِ u را براساس پاسخِ البرز پیدا کند. (۱۶ امتیاز)

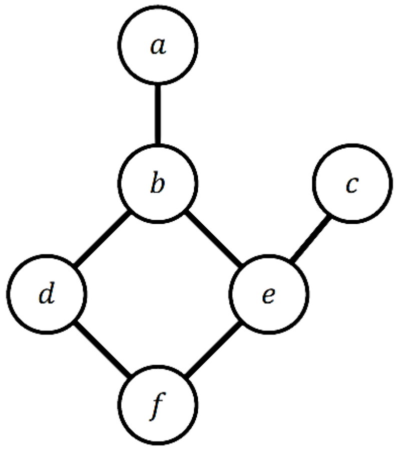
ج) یک درختِ T (درختی ۱۴۰۳ رأسی که درجهٔ رأس‌های آن، حداکثر ۳ باشد) مثال بزنید که برای آن، هیچ پرسشی با اندازهٔ حداکثر ۳۵۰ رأس وجود نداشته باشد که همواره با جوابِ آن پرسش، بتوان رأسِ u را با قطعیت پیدا کرد. (۱۶ امتیاز)

محاسبات و نکته‌های مهم

سؤال چهارم: (۴۰ نمره)

در یک گرافِ ساده، **سختیِ** یک مجموعهٔ S از رأس‌ها را تعدادِ یال‌هایی از این گراف تعریف می‌کنیم که حداقل یکی از دو سرشان، عضوِ S باشد.

به عنوان مثال در گراف زیر، **سختیِ** مجموعهٔ $S = \{a, b, c\}$ برابرِ ۴ است.



یک گرافِ ساده را در نظر بگیرید که ۱۰۰۰ یال دارد و درجهٔ هر رأسِ آن حداکثر ۴ است. در این گراف، ۳۰۰ رأس به رنگِ قرمز، و بقیهٔ رأس‌ها به رنگِ آبی هستند. به یک مجموعه از رأس‌ها، قرمز می‌گوییم اگر همهٔ اعضای آن مجموعه به رنگِ قرمز باشند. ثابت کنید یک مجموعهٔ قرمزِ ۳۰ رأسی با سختیِ حداکثر ۱۰۰ وجود دارد.

(اگر به جای اثباتِ حکم سؤال، فقط نشان دهید یک مجموعهٔ قرمزِ ۳۰ رأسی با سختیِ حداکثر ۱۰۵ وجود دارد، ۲۶ امتیاز دریافت می‌کنید؛ همچنین اگر نشان دهید یک مجموعهٔ قرمزِ ۳۰ رأسی با سختی حداکثر ۱۱۰ وجود دارد، ۱۳ امتیاز دریافت می‌کنید.)

محاسبات و نکته‌های مهم

بسمه تعالی

اگر این پاسخنامه برای به شما نیست، مسئول جلسه را آگاه کنید.

کلید المپیاد کامپیوتر

مرحله دوم ۱۴۰۳

نشر گاج

فقط یک گزینهٔ درست را برای هر سؤال با مداد سیاه تکمیل کنید:

صحیح: غلط:

۱	۲
۲	۴
۳	۱
۴	۱
۵	۳
۶	۱
۷	۵
۸	۴
۹	۵
۱۰	۳
۱۱	۲
۱۲	۱
۱۳	۴
۱۴	۴
۱۵	۲
۱۶	۳
۱۷	۵
۱۸	۵
۱۹	۵
۲۰	۳
۲۱	
۲۲	
۲۳	
۲۴	
۲۵	
۲۶	
۲۷	
۲۸	
۲۹	
۳۰	
۳۱	
۳۲	
۳۳	
۳۴	
۳۵	
۳۶	
۳۷	
۳۸	
۳۹	
۴۰	
۴۱	
۴۲	
۴۳	
۴۴	
۴۵	
۴۶	
۴۷	
۴۸	
۴۹	
۵۰	
۵۱	
۵۲	
۵۳	
۵۴	
۵۵	
۵۶	
۵۷	
۵۸	
۵۹	
۶۰	
۶۱	
۶۲	
۶۳	
۶۴	
۶۵	
۶۶	
۶۷	
۶۸	
۶۹	
۷۰	
۷۱	
۷۲	
۷۳	
۷۴	
۷۵	
۷۶	
۷۷	
۷۸	
۷۹	
۸۰	
۸۱	
۸۲	
۸۳	
۸۴	
۸۵	
۸۶	
۸۷	
۸۸	
۸۹	
۹۰	
۹۱	
۹۲	
۹۳	
۹۴	
۹۵	
۹۶	
۹۷	
۹۸	
۹۹	
۱۰۰	
۱۰۱	
۱۰۲	
۱۰۳	
۱۰۴	
۱۰۵	
۱۰۶	
۱۰۷	
۱۰۸	
۱۰۹	
۱۱۰	
۱۱۱	
۱۱۲	
۱۱۳	
۱۱۴	
۱۱۵	
۱۱۶	
۱۱۷	
۱۱۸	
۱۱۹	
۱۲۰	